



Artículo VI-03

PROCEDIMIENTO PARA ESTIMAR LOS AMORTIGUAMIENTOS DE UN SISTEMA A PARTIR DE FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

Ricardo Taborda Ríos⁽¹⁾ y Mario Ordaz Schroeder⁽¹⁾

RESUMEN

Se propone un procedimiento para estimar los amortiguamientos de un sistema, partiendo del ajuste de la función de transferencia de uno de sus grados de libertad. El método se basa en el concepto de superposición modal expresada en el dominio de la frecuencia. La propuesta es verificada con ejemplos teóricos y prácticos, comparando sus resultados con los obtenidos con el método del factor de amplificación dinámica y con una técnica paramétrica modal. Finalmente, se discuten las debilidades y fortalezas del procedimiento propuesto.

ABSTRACT

A procedure is proposed for the estimation of the damping values of a system, fitting the transfer function of one of its degrees of freedom. The method is based on the concept of modal superposition expressed in the frequency domain. The proposal is verified against theoretical and practical examples, comparing their results with those obtained with the method of the dynamic amplification factor and with a modal parametric technique. Finally, strengths and weaknesses of the procedure proposed are discussed.

INTRODUCCIÓN

Para el análisis de los registros de movimientos sísmicos que se obtienen de la instrumentación de estructuras, o por medio de pruebas dinámicas forzadas o de vibración ambiental, se cuenta con diversas técnicas que permiten la identificación de los parámetros estructurales. Estas son llamadas *técnicas de identificación de sistemas*. En general se clasifican de dos maneras, de acuerdo al dominio en el que operan, es decir, si se trata de procedimientos en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia, y según el tipo de estimación que se haga de las propiedades a identificar, considerándose dos formas: paramétrica y no paramétrica (Ljung, 1987; Ewins, 1986; Bendat y Piersol, 1989).

En los procesos de identificación no paramétricos, las propiedades del sistema son identificadas directamente a partir de los registros obtenidos mediante artificios matemáticos. En cambio, en una estimación de tipo paramétrico, dichas propiedades son el producto de ajustar los parámetros de un modelo idealizado del sistema a través de la reproducción de la respuesta experimental.

⁽¹⁾ Instituto de Ingeniería, UNAM, Ciudad Universitaria, Coyoacán 04510, México DF, rtar@pumas.iingen.unam.mx, mors@pumas.iingen.unam.mx

Haciendo uso de estas técnicas, según sea la instrumentación con que se cuenta y de acuerdo con el procedimiento seleccionado, es posible llegar a estimar diferentes propiedades dinámicas, tales como frecuencias naturales de vibrar, factores de participación, fracciones de amortiguamiento crítico o formas modales del sistema. Adicionalmente, estos métodos permiten estudiar la variación de dichas propiedades entre evento y evento o durante los mismos, permitiendo así identificar la presencia de comportamientos no lineales en los sistemas o el simple seguimiento del deterioro o recuperación de una estructura.

Comúnmente, un primer nivel de estudio, consiste en el examen de registros de acuerdo con un análisis no paramétrico en el dominio de la frecuencia a través de un proceso espectral convencional (Bendat y Piersol, 1989). En este, mediante funciones de transferencia entre las señales de respuesta registradas en la estructura y la señal de excitación a la cual esta está sujeta, es posible identificar, en buen grado, las frecuencias y formas de vibrar del sistema. Sin embargo, tratándose de los amortiguamientos, o bien se dejan para un segundo nivel de estudio o se estiman únicamente para el modo fundamental de vibrar según el concepto del factor de amplificación dinámica.

Un segundo nivel de estudio consiste en la aplicación de una técnica paramétrica, en la que, mediante el ajuste de un modelo idealizado del sistema, pueden depurarse las propiedades identificadas en el primer nivel y llegar a determinarse otras características del sistema, como son los amortiguamientos de modos superiores o los factores de participación de las respuestas de análisis. Es importante señalar que es bien conocido que las técnicas de identificación paramétricas conducen a mejores resultados que los procedimientos no paramétricos (Ljung, 1987).

Trabajos que combinen ambos niveles no son muy frecuentes, como tampoco es abundante el número de estructuras instrumentadas. Aun así, en México ha habido estudios como el realizado por Murià-Vila *et al.* (2001), en el cual se utilizaron técnicas paramétricas y no paramétricas, por medio de las cuales se analizó en profundidad la respuesta de un edificio instrumentado en el Distrito Federal. Sin embargo, no en todos los casos se cuenta con el tiempo y las herramientas necesarias para hacer estudios tan detallados y precisos.

En el procedimiento que se proponen a continuación, se parte de la identificación no paramétrica de las frecuencias de resonancia del sistema y, con un ajuste paramétrico simple, se logra obtener de manera rápida y sencilla, una estimación de los porcentajes de amortiguamiento crítico modal del sistema.

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Supóngase que se tiene un sistema de masas concentradas de n grados de libertad como el que se muestra en la fig. 1, cuya ecuación de movimiento, cuando es sometido a una excitación en la base, puede ser expresada como

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = -[M]\{1\}\ddot{x}_s \quad (1)$$

donde:

$[M]$ es la matriz de masas de $n \times n$

$[C]$ es la matriz de amortiguamientos de $n \times n$

$[K]$ es la matriz de rigidez de $n \times n$

$\{\ddot{x}\}$ es el vector de aceleraciones relativas de $n \times 1$

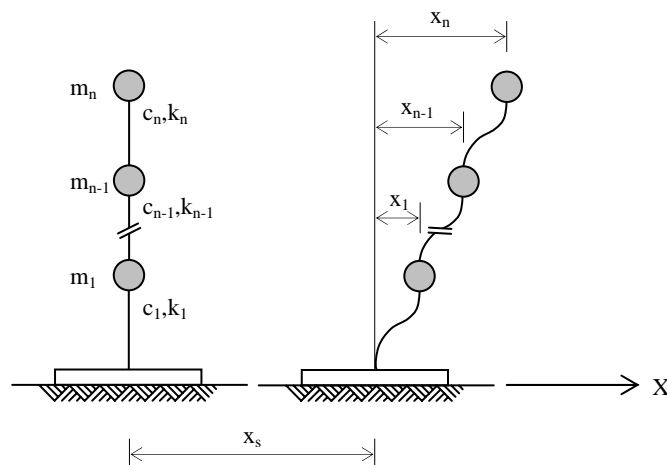


Figura 1. Sistema de masas concentradas con n grados de libertad

- $\{\dot{x}\}$ es el vector de velocidades relativas de $n \times 1$
- $\{x\}$ es el vector de desplazamientos relativos de $n \times 1$
- \ddot{x}_s es la aceleración de la excitación
- $\{1\}$ es un vector unitario.

Si se supone que el sistema es tal que posee un amortiguamiento clásico y ya que la ec. 1 es un problema de valores y vectores propios, existe una matriz real de vectores característicos $[\phi]_{n \times n}$ que diagonaliza las matrices de rigidez, masa y amortiguamiento, para un conjunto de valores $\{\omega\}_{n \times 1}$. Entonces la ecuación de movimiento del sistema puede describirse como

$$[M]^* \{\ddot{y}\} + [C]^* \{\dot{y}\} + [K]^* \{y\} = -\{l\} \ddot{x}_s \quad (2)$$

donde:

$$\{x\} = [\phi] \{y\} \quad (3)$$

$$\{\dot{x}\} = [\phi] \{\dot{y}\} \quad (4)$$

$$\{\ddot{x}\} = [\phi] \{\ddot{y}\} \quad (5)$$

$$\{l\}_{n \times 1} = [\phi]_{n \times n}^T [M]_{n \times n} \{1\}_{n \times 1} \quad (6)$$

y $[M]^*$, $[K]^*$ y $[C]^*$ son las matrices diagonalizadas de masa, rigidez y amortiguamiento, respectivamente.

Por lo tanto, el sistema matricial de ecuaciones logra ser desacoplado, de forma tal que la ecuación representativa del modo de vibrar j puede escribirse como

$$m_j^* \ddot{y}_j + c_j^* \dot{y}_j + k_j^* y_j = -l_j \ddot{x}_s \quad (7)$$

donde:

- m_j^* es la masa modal
- c_j^* es el amortiguamiento modal
- k_j^* es la rigidez modal
- \ddot{y}_j es la aceleración relativa modal
- \dot{y}_j es la velocidad relativa modal
- y_j es el desplazamiento relativo modal.

Si definimos las expresiones auxiliares dadas en las ecs. 8 y 9, y sabiendo que la frecuencia modal del sistema puede definirse de acuerdo con la ec. 10, entonces la ecuación desacoplada de movimiento para el modo j puede escribirse tal como se presenta en la ec. 11, donde ξ_j , ω_j y γ_j representan la fracción de amortiguamiento crítico, la frecuencia y el factor de participación del modo j , respectivamente.

$$\frac{c_j^*}{m_j^*} = 2\xi_j\omega_j \quad (8)$$

$$\frac{l_j}{m_j^*} = \gamma_j \quad (9)$$

$$\frac{k_j^*}{m_j^*} = \omega_j^2 \quad (10)$$

$$\ddot{y}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{y}_j + \omega_j^2 y_j = -\gamma_j\ddot{x}_s \quad (11)$$

De otra parte, se conoce que la transformada de Fourier está definida por la ec. 12. De manera que, al aplicar esta transformada a la ecuación de movimiento, ésta última queda definida en el dominio de la frecuencia (ω) según se muestra en la ec. 13. En la que $\dot{Y}(\omega)$ y $\ddot{Y}(\omega)$ son las respectivas transformadas de Fourier de la primera y segunda derivada de $y(t)$, las cuales a su vez, de acuerdo con las propiedades de la transformada de Fourier, pueden expresarse conforme las ecs. 14 y 15.

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-i\omega t} dt \quad (12)$$

$$\ddot{Y}(\omega) + 2\xi_j\omega_j\dot{Y}(\omega) + \omega_j^2 Y(\omega) = -\gamma_j\ddot{X}_s(\omega) \quad (13)$$

$$\dot{Y}(\omega) = i\omega Y(\omega) \quad (14)$$

$$\ddot{Y}(\omega) = -\omega^2 Y(\omega) \quad (15)$$

Dado lo anterior, al remplazar las ecs. 14 y 15 en la ec. 13, la expresión que define el movimiento desacoplado del modo j en el dominio de la frecuencia, puede escribirse como se presenta en la ec. 16. A partir esta expresión, la función de transferencia entre el desplazamiento relativo en el modo j y la aceleración de la base puede determinarse según la ec. 17.

$$-\omega^2 Y_j(\omega) + i2\xi_j \omega_j \omega Y_j(\omega) + \omega_j^2 Y_j(\omega) = -\gamma_j \ddot{X}_s(\omega) \quad (16)$$

$$\frac{Y_j(\omega)}{\ddot{X}_s(\omega)} = \gamma_j \frac{-1}{(\omega_j^2 - \omega^2) + i(2\xi_j \omega_j \omega)} \quad (17)$$

Ahora bien, si la respuesta de desplazamiento relativo del sistema está dada por la ec. 5, la cual también puede escribirse para el grado de libertad n de la manera en que se hace en la ec. 18, entonces esta puede expresarse en el dominio de la frecuencia según la ec. 19, la cual equivale, de manera abreviada, a la ec. 20.

$$\ddot{x}_n = \ddot{y}_1 \phi_{n1} + \ddot{y}_2 \phi_{n2} + \dots + \ddot{y}_j \phi_{nj} + \dots + \ddot{y}_n \phi_{nn} \quad (18)$$

$$\ddot{X}_n = \ddot{Y}_1(\omega) \phi_{n1} + \ddot{Y}_2(\omega) \phi_{n2} + \dots + \ddot{Y}_j(\omega) \phi_{nj} + \dots + \ddot{Y}_n(\omega) \phi_{nn} \quad (19)$$

$$\ddot{X}_n(\omega) = \sum_{j=1}^n \ddot{Y}_j(\omega) \phi_{nj} \quad (20)$$

Al remplazar la ec. 15 en la ec. 20, se obtiene la respuesta relativa de aceleración en el grado de libertad n , en términos del desplazamiento relativo modal (ec. 21).

$$\ddot{X}_n(\omega) = \sum_{j=1}^n [-\omega^2 Y_j(\omega) \phi_{nj}] \quad (21)$$

Por lo tanto, la respuesta de aceleración absoluta en el grado de libertad n puede expresarse según la ec. 22, la cual, al dividir a ambos lados de la igualdad por la transformada de Fourier de la aceleración en la base (ec. 23), permite llegar a definir la función de transferencia entre la respuesta en el grado de libertad n y la excitación en la base, en términos del desplazamiento relativo modal (ec. 24).

$$\ddot{X}_n(\omega) + \ddot{X}_s(\omega) = \sum_{j=1}^n [-\omega^2 Y_j(\omega) \phi_{nj}] + \ddot{X}_s(\omega) \quad (22)$$

$$\frac{\ddot{X}_n(\omega) + \ddot{X}_s(\omega)}{\ddot{X}_s(\omega)} = \sum_{j=1}^n \frac{[-\omega^2 Y_j(\omega) \phi_{nj}]}{\ddot{X}_s(\omega)} + 1 \quad (23)$$

$$FT(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^n \left[\frac{-\omega^2 Y_j(\omega) \phi_{nj}}{\ddot{X}_s(\omega)} \right] \quad (24)$$

Al reemplazar la ec. 17 en la ec. 24 se logra expresar la función de transferencia como se muestra en la ec. 25. Si el segundo término de dicha ecuación es multiplicado en el numerador y el denominador por la conjugada del denominador, con el objetivo de evitar la presencia del término imaginario en este, y al mismo tiempo se asume que todos los vectores propios están normalizados con respecto al grado de libertad n , por lo que $\phi_{nj} = 1$, entonces se llega a la ec. 26. Al separar en esta última expresión los términos imaginario y real de la sumatoria, se obtiene la ec. 27. De esta manera, la norma de la función de transferencia puede definirse según se presenta en la ec. 28.

$$FT(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{\omega^2 \gamma_j \phi_{nj}}{(\omega_j^2 - \omega^2) + i(2\xi_j \omega_j \omega)} \quad (25)$$

$$FT(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{\omega^2 \gamma_j ((\omega_j^2 - \omega^2) - i(2\xi_j \omega_j \omega))}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \omega)^2} \quad (26)$$

$$FT(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{\omega^2 \gamma_j (\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \omega)^2} + i \sum_{j=1}^n \frac{-2\xi_j \omega_j \omega^3 \gamma_j}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \omega)^2} \quad (27)$$

$$|FT(\omega)|^2 = \left[1 + \sum_{j=1}^n \frac{\omega^2 \gamma_j (\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \omega)^2} \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^n \frac{-2\xi_j \omega_j \omega^3 \gamma_j}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \omega)^2} \right]^2 \quad (28)$$

En el caso en que el sistema es de un grado de libertad, la función de transferencia $|FT(\omega)|$ es de la forma que se muestra en la fig. 2. En cambio, para n grados de libertad, la función de transferencia será la sumatoria de n funciones similares a la de un grado de libertad, cada una de ellas afectada por su correspondiente factor de participación. Por lo tanto será de la forma que se enseña en la fig. 3.

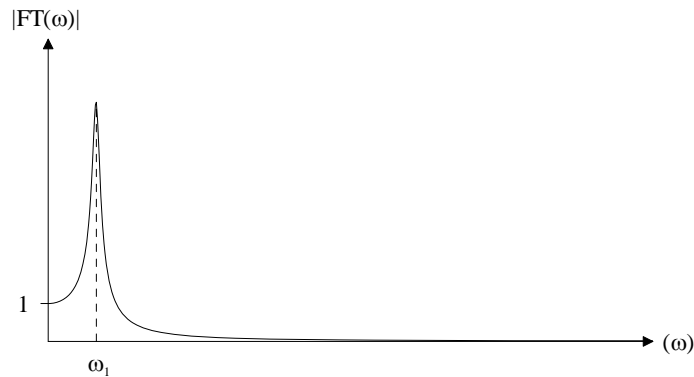


Figura 2. Función de transferencia tipo para un sistema de un grado de libertad

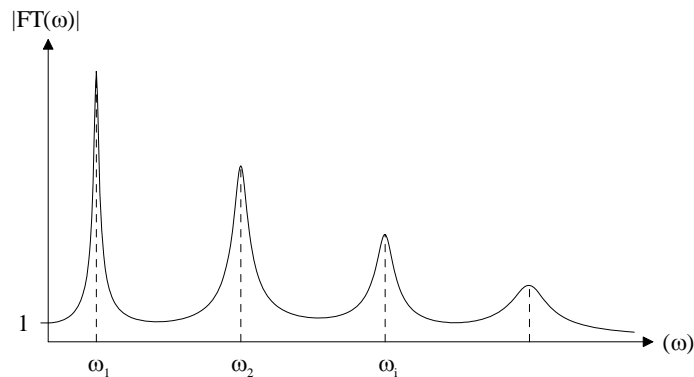


Figura 3. Función de transferencia tipo de un sistema de n grados de libertad

Dadas las características de la función de transferencia de un grado de libertad y considerando que la de n grados de libertad no es otra cosa que la suma de n funciones similares (ec. 28), se propone que la amplitud de la función de transferencia evaluada en ω_i es aceptablemente bien estimada si en ella únicamente influyen los términos de la sumatoria correspondientes a $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{i-1}$ y ω_{i+1} . De manera que la ec. 28 se puede reescribir como

$$|FT(\omega_i)|_{aprox}^2 = \left[1 + \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\omega_i^2 \gamma_j (\omega_j^2 - \omega_i^2)}{(\omega_j^2 - \omega_i^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \omega_i)^2} \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{i+1} \frac{-2\xi_j \omega_j \omega_i^3 \gamma_j}{(\omega_j^2 - \omega_i^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \omega_i)^2} \right]^2 \quad (29)$$

Ahora bien, supóngase que se tiene un sistema para el cual se ha determinado experimentalmente la función de transferencia de aceleraciones absolutas (FT_{exp}) entre el grado de libertad n (azotea) y la excitación (terreno) en una dirección dada. Adicionalmente, asúmase que las influencias fruto del acoplamiento con el movimiento en la dirección ortogonal a la dirección de análisis y con el movimiento de torsión son despreciables en el punto de medición. Entonces, bajo estos preceptos, la función de transferencia del sistema también puede ser idealizada como la que se mostró en la fig. 3.

Dado lo anterior, en dicha función de transferencia (FT_{exp}) es posible identificar los valores de ω como aquellos asociados a las ordenadas máximas. De manera que si, a partir de un modelo matemático del sistema, se logran estimar aproximadamente los valores de γ_j , y si adicionalmente se conocen $\xi_{i-1}, \xi_{i-2}, \dots$ y se suponen dos valores límite (0 y 1) para ξ_{i+1} , entonces, mediante un proceso iterativo, es posible llegar a estimar el valor de ξ_i .

Dicho proceso consistirá en ajustar la amplitud de la función de transferencia dada por la ec. 29 a la amplitud asociada a la frecuencia i que ha sido identificada en la función de transferencia experimental (FT_{exp}). Para lo cual conviene definir el error en el ajuste como

$$Error_i = |FT(\omega_i)|_{aprox}^2 - |FT(\omega_i)|_{exp}^2 \quad (30)$$

donde, sustituyendo el término correspondiente a la ec. 29, se obtiene:

$$Error_i = \left[1 + \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\omega_i^2 \gamma_j (\omega_j^2 - \omega_i^2)}{(\omega_j^2 - \omega_i^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \omega_i)^2} \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{i+1} \frac{-2\xi_j \omega_j \omega_i^3 \gamma_j}{(\omega_j^2 - \omega_i^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \omega_i)^2} \right]^2 - |FT(\omega_i)|_{exp}^2 \quad (31)$$

De acuerdo con los supuestos planteados, resulta preferible aislar los términos conocidos de aquel que se desea conocer (ξ_i). Entonces se reescribe la ec. 31 de la siguiente manera:

$$Error_i = \left[1 + \left(\sum_{j=1}^i \frac{\omega_i^2 \gamma_j (\omega_j^2 - \omega_i^2)}{(\omega_j^2 - \omega_i^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \omega_i)^2} \right) + \left(\frac{\omega_i^2 \gamma_{i+1} (\omega_{i+1}^2 - \omega_i^2)}{(\omega_{i+1}^2 - \omega_i^2)^2 + (2\xi_{i+1} \omega_{i+1} \omega_i)^2} \right) \right]^2 + \left[\left(\sum_{j=1}^i \frac{-2\xi_j \omega_j \omega_i^3 \gamma_j}{(\omega_j^2 - \omega_i^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \omega_i)^2} \right) + \left(\frac{-2\xi_{i+1} \omega_{i+1} \omega_i^3 \gamma_{i+1}}{(\omega_{i+1}^2 - \omega_i^2)^2 + (2\xi_{i+1} \omega_{i+1} \omega_i)^2} \right) \right]^2 - |FT(\omega_i)|_{exp}^2 \quad (32)$$

Por facilidad, se definen las siguientes expresiones:

$$A_j = \frac{\omega_i^2 \gamma_j (\omega_j^2 - \omega_i^2)}{(\omega_j^2 - \omega_i^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \omega_i)^2} \quad (33)$$

$$B_j = \frac{-2\xi_j \omega_j \omega_i^3 \gamma_j}{(\omega_j^2 - \omega_i^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \omega_i)^2} \quad (34)$$

$$C_i = \omega_i^2 \gamma_{i+1} (\omega_{i+1}^2 - \omega_i^2) \quad (35)$$

$$D_i = -2\omega_{i+1} \omega_i^3 \gamma_{i+1} \quad (36)$$

$$E_i = (\omega_{i+1}^2 - \omega_i^2)^2 \quad (37)$$

$$F_i = (2\omega_{i+1} \omega_i)^2 \quad (38)$$

Entonces la ec. 32 queda como

$$Error_i = \left[1 + \left(\sum_{j=1}^i A_j \right) + \left(\frac{C_i}{E_i + F_i \xi_{i+1}^2} \right) \right]^2 + \left[\left(\sum_{j=1}^i B_j \right) + \left(\frac{-D_i \xi_{i+1}}{E_i + F_i \xi_{i+1}^2} \right) \right]^2 - |FT(\omega_i)|_{exp}^2 \quad (39)$$

Es valioso hacer notar que si i es igual a j , entonces los valores de A_j y B_j son:

$$A_j = 0 \quad (40)$$

$$B_j = \frac{-\gamma_j}{2\xi_j} \quad (41)$$

Por lo tanto, el error en el ajuste, puede describirse de la siguiente manera:

$$Error_i = \left[1 + \left(\sum_{j=1}^{i-1} A_j \right) + \left(\frac{C_i}{E_i + F_i \xi_{i+1}^2} \right) \right]^2 + \left[\left(\frac{-\gamma_i}{2\xi_i} \right) + \left(\sum_{j=1}^{i-1} B_j \right) + \left(\frac{-D_i \xi_{i+1}}{E_i + F_i \xi_{i+1}^2} \right) \right]^2 - |FT(\omega_i)|_{exp}^2 \quad (42)$$

Dada entonces la ec. 42, el procedimiento que se propone seguir para la estimación de los valores de amortiguamiento del sistema a partir de la función de transferencia conocida, es el siguiente:

1. Se propone un valor para ξ_i .
2. Se determinan los valores de ΣA_j , ΣB_j , C_i , D_i , E_i y F_i .
3. Se evalúa $Error_i$ para $\xi_{i+1} = 0$.
4. Se evalúa $Error_i$ para $\xi_{i+1} = 1$.

En este punto conviene mencionar que se ha encontrado que sólo para un intervalo muy estrecho de valores de ξ_i se obtiene que los valores de $Error_i$ estimados en los pasos 3 y 4 sean de signo contrario. Esto implica que la ecuación que define ξ_i tiene al menos una solución (raíz) en el intervalo definido entre $\xi_{i+1} = 0$ y $\xi_{i+1} = 1$. Esta condición satisface que $|FT(\omega)|$ sea muy cercano a $|FT(\omega)|_{exp}$. De manera que, continuando:

5. Si $\begin{cases} Error_i(\xi_{i+1} = 0) \cdot Error_i(\xi_{i+1} = 1) < 0 & \rightarrow \text{Se fija el valor } \xi_i \\ Error_i(\xi_{i+1} = 0) \cdot Error_i(\xi_{i+1} = 1) > 0 & \rightarrow \text{Se regresa al paso 1} \end{cases}$
6. Se pasa a $i = i + 1$.

Por último, es importante hacer ver que cuando i es igual a 1, los términos A_{i-1} y B_{i-1} no se tienen en cuenta. De manera que al determinar ξ_i se obtiene el valor de ξ_{i-1} para la siguiente estimación, es decir, para el caso en que i es igual a 2, y así sucesivamente.

Antes de pasar a presentar los ejemplos teóricos y prácticos con los que se ha evaluado el procedimiento propuesto, conviene hacer una última observación. Nótese que si el sistema es de un solo grado de libertad, en la ec. 29 pueden eliminarse los términos provenientes de la parte real de la función, y el término correspondiente a la parte imaginaria queda reducido a aquel que se definió en la ec. 34 como B_j . Siendo así, como i es igual a j , entonces la ec. 29 queda reducida a

$$|FT(\omega_1)|^2 = \left[\frac{-1}{2\xi_1} \right]^2 \quad (43)$$

de donde puede despejarse el amortiguamiento como

$$\xi_1 = \frac{1}{2 \cdot FT(\omega_1)} \quad (44)$$

lo cual no es otra cosa más que la expresión usada como el factor de amplificación dinámica para el cálculo del amortiguamiento.

EJEMPLOS TEÓRICOS

Para este primer ejemplo se determinó la función de transferencia teórica de un sistema de cuatro grados de libertad. Los factores de participación para cada uno de los modos del sistema, habiendo normalizado las formas modales con respecto al cuarto modo de libertad (azotea), son los que se muestran en la tabla 1, en la que también se incluyen las frecuencias del sistema, los amortiguamientos teóricos y calculados con la propuesta presentada, y el error relativo entre estos. En la misma tabla, en columnas aparte, se presentan el valor de amortiguamiento y el error relativo asociado, que se obtienen a mediante la el método del factor de amplificación dinámica (FAD) para el primer modo. En la fig. 4 se comparan las funciones de transferencia calculadas teóricamente (línea continua) y a partir de los amortiguamientos estimados (puntos).

Se puede observar que las diferencias entre los valores teóricos y estimados son despreciables. Además, el error al que puede conducir la aplicación de la expresión del factor de amplificación dinámica, en este caso, es considerable.

Tabla 1. Comparación de resultados para el ejemplo teórico

Modo	Frecuencia (Hz)	FP	ξ Teórico (%)	ξ Propuesta (%)	Error (%)	ξ_{FAD} (%)	Error (%)
1	0.796	1.43	5.00	4.99	0.02	3.49	30.23
2	3.183	-0.54	5.00	4.99	0.02		
3	5.570	0.29	5.00	5.04	0.80		
4	7.958	-0.18	5.00	4.99	0.02		

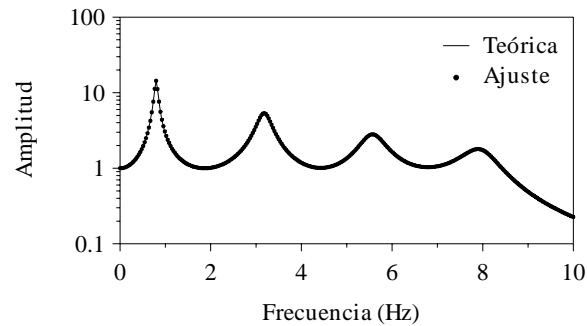


Figura 4. Comparación entre las funciones de transferencia teórica y estimada para el ejemplo teórico

Sin embargo, en este ejemplo estrictamente teórico, no se involucra la transformación de las señales al dominio de la frecuencia para la obtención de la función de transferencia. Se sabe que en dicho proceso se introducen, en el procedimiento propuesto, factores que pueden afectar la estimación, tales como el ruido numérico o la identificación misma de las frecuencias. Además, en un proceso de identificación no siempre logran tomarse en cuenta todos los modos presentes en el sistema.

Para evaluar en qué grado estos elementos pueden afectar los resultados a los que conduzca el procedimiento planteado, en un programa de diseño estructural se calcularon las respuestas de tres modelos de 4, 10 y 15 niveles sometidos a un evento sísmico. Se obtuvieron las historias de la respuesta de aceleración absoluta para la azotea y se calcularon las funciones de transferencia de estas con respecto a la excitación. Asimismo, de la información obtenida del análisis modal y conocida la distribución de masas en cada nivel, se calcularon los factores de participación considerando las formas modales normalizadas con respecto a la azotea.

Se procedió entonces a efectuar la estimación de los amortiguamientos suponiendo que estos eran desconocidos y efectuando el ajuste tomando en cuenta únicamente los primeros cuatro modos de vibrar. En las tablas 2 a 4 se presentan las frecuencias, factores de participación, amortiguamientos teóricos y estimados, y el porcentaje de error relativo entre estos últimos. Al igual que en el ejemplo anterior, en columnas separadas se presenta el resultado obtenido para el primer modo al aplicar la expresión del factor de amplificación dinámica. En las figs. 5 a 7 se presentan en líneas continuas las funciones de transferencia teóricas obtenidas con el proceso espectral de las señales de entrada y de salida de cada una de las estructuras y con puntos el ajuste lineal obtenido a partir de los amortiguamientos estimados.

En general, se puede ver que las curvas estimadas a partir de los amortiguamientos calculados con el procedimiento propuesto ajustan bien a las obtenidas teóricamente a partir de los modelos de las estructuras para los tres casos (figs. 5 a 7), aunque es preciso indicar que, en el caso de las estructuras de 10 y 15 niveles, con el fin de evaluar el grado de influencia que puede llegar a tener en la estimación la ausencia de información sobre modos de orden superior, se ha limitado el ajuste a los cuatro primeros

modos de vibrar, ya que son excepcionales los casos en que los modos de este orden llegan a ser detectados en un proceso de identificación no paramétrica.

Al comparar los valores de amortiguamiento teóricos con los calculados, es claro que el método propuesto estima con un muy buen grado de aproximación el amortiguamiento para el primer modo. En lo que respecta a los modos superiores, el error se hace mayor, aunque en ningún caso alcanza una magnitud superior al 20 por ciento. En todos los casos el mayor error se observa en el último modo considerado.

En vista de los resultados para el caso de 4 niveles, en la cual se consideran todos los modos de vibrar de la estructura, pareciera que existe una acumulación en el error conforme se trate de un modo superior, por lo que se presenta un mayor error en el cálculo del amortiguamiento. En los otros dos casos este comportamiento se suma al error que introduce la no consideración de los demás modos presentes en la respuesta y evidentes en la función de transferencia.

Tabla 2. Comparación de resultados para la estructura de 4 niveles

Modo	Frecuencia (Hz)	FP	ξ Teórico (%)	ξ Propuesta (%)	Error (%)	ξ_{FAD} (%)	Error (%)
1	1.443	1.32	5.00	5.00	0.08	3.77	24.57
2	5.824	-0.43	5.00	4.69	6.24		
3	13.721	0.17	5.00	5.48	9.60		
4	22.754	-0.04	5.00	5.70	14.00		

Tabla 3. Comparación de resultados para la estructura de 10 niveles

Modo	Frecuencia (Hz)	FP	ξ Teórico (%)	ξ Propuesta (%)	Error (%)	ξ_{FAD} (%)	Error (%)
1	0.788	1.32	5.00	4.78	4.38	3.62	27.55
2	2.649	-0.47	5.00	4.39	12.30		
3	5.279	0.36	5.00	5.42	8.30		
4	8.896	-0.19	5.00	4.32	13.60		

Tabla 4. Comparación de resultados para la estructura de 15 niveles

Modo	Frecuencia (Hz)	FP	ξ Teórico (%)	ξ Propuesta (%)	Error (%)	ξ_{FAD} (%)	Error (%)
1	0.595	1.30	5.00	4.99	0.14	3.83	23.42
2	1.911	-0.45	5.00	4.29	14.30		
3	3.577	0.37	5.00	5.42	8.40		
4	5.701	-0.21	5.00	4.09	18.20		

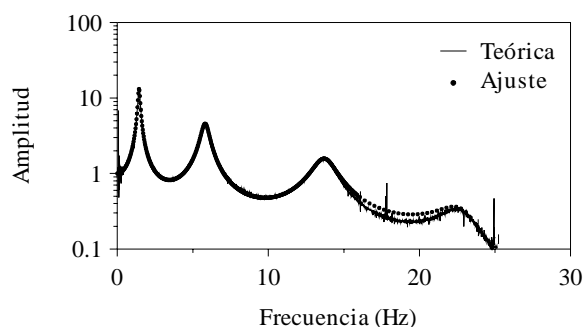


Figura 5. Ajuste de las funciones de transferencia para la estructura de 4 niveles

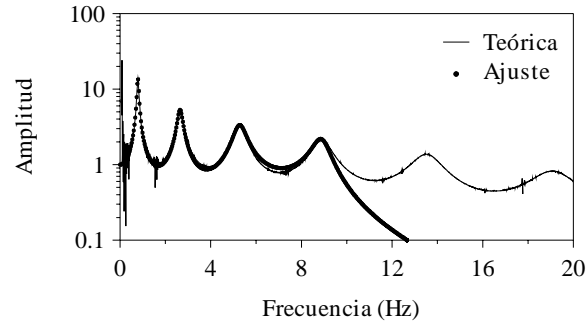


Figura 6. Ajuste de las funciones de transferencia para la estructura de 10 niveles

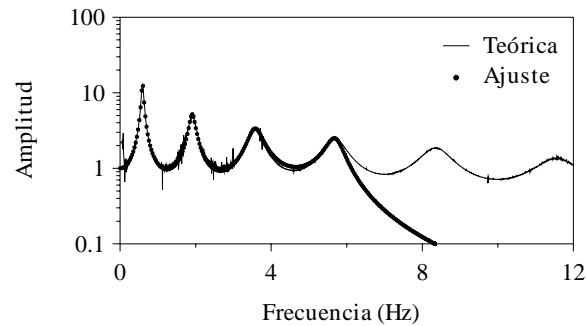


Figura 7. Ajuste de las funciones de transferencia para la estructura de 15 niveles

Por último, se hace nuevamente evidente que los valores de amortiguamiento estimados con la expresión del factor de amplificación dinámica, para el primer modo de vibrar, en los tres casos, llevan a errores aun mayores a los máximos encontrados para los modos superiores con el método propuesto.

EJEMPLOS PRÁCTICOS

Una de las principales aplicaciones de los procedimientos de identificación de sistemas está en las pruebas de vibración ambiental que se hacen a las estructuras. En la tabla 5 y la fig. 8 se presentan los resultados obtenidos en una prueba de este tipo realizada en un edificio instrumentado en la ciudad de Acapulco. Los detalles sobre la instrumentación del edificio y sus principales propiedades pueden encontrarse en Alcántara *et al.* (2002) y Murià-Vila *et al.* (2002), respectivamente.

El ajuste observado es aceptable y las diferencias que se observan en medio de los tres primeros modos de vibrar están asociadas a la localización de las frecuencias de torsión que se hacen presentes por efectos de acoplamiento. Sin embargo, la principal finalidad de la instrumentación de estructuras radica en la captura de registros durante eventos sísmicos. En estos casos, conviene hacer un análisis espectral por ventanas para poder evaluar la evolución de las propiedades de la estructura durante la ocurrencia del evento.

Para el mismo edificio se contaba además, con un análisis paramétrico modal en el tiempo para ventanas de 10 s, realizado mediante el programa MIMO (Li y Mau, 1990 y 1991). En este trabajo se identificaron los amortiguamientos para los primeros cuatro modos de vibrar (Correa, 2003). Resultaba de especial interés poder confrontar los valores de amortiguamiento obtenidos con esta refinada técnica de

Tabla 5. Resultados para una prueba de vibración ambiental

Modo	Frecuencia (Hz)	FP	ξ Propuesta (%)	ξ FAD (%)
				0.89
1	0.854	1.43	1.28	
2	2.832	-0.65	2.18	
3	4.956 - 5.078	0.29	2.38	
4	7.153 - 7.861	-0.21	4.55	

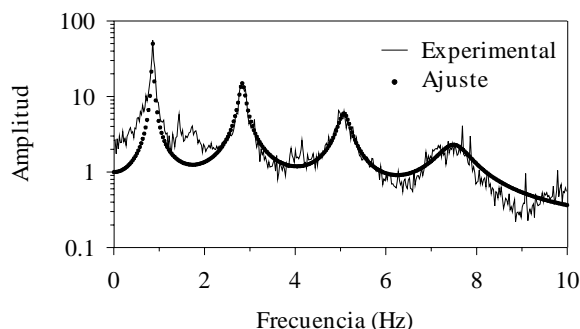


Figura 8. Ajuste para una prueba de vibración ambiental

identificación contra los que se obtuviesen a partir del procedimiento propuesto. Se realizó entonces un análisis espectral para ventanas de 20 s con traslapes cada 10 s y para cada una de las ventanas se identificaron frecuencias y se estimaron los valores de amortiguamiento.

En la fig. 9 se presentan los resultados obtenidos por ambos métodos en el respectivo análisis por ventanas. Se incluye también el valor obtenido utilizando el método propuesto y el respectivo al factor de amplificación dinámica a partir de un análisis espectral para las señales completas. En la tabla 6 se hace un resumen de los resultados encontrados. Para el caso de los análisis por ventanas, se incluyen el valor promedio y la desviación estándar de los amortiguamientos encontrados.

En el análisis por ventanas, los resultados obtenidos con el método propuesto concuerdan en buena medida con aquellos obtenidos a partir de la técnica paramétrica modal, incluso en el caso de los modos superiores, contrario a lo que pudiera haberse esperado conforme con lo señalado en los ejemplos teóricos. Las mayores diferencias se encuentran en las primeras ventanas (0 a 20 s), en la que se observa que el procedimiento propuesto tiende a sobrestimar el valor del amortiguamiento, ocasionando a la vez una alteración en los valores promedios presentados en la tabla 6. Estos errores son atribuibles a la poca información en amplitud que se observa en este segmento de la señal, el cual corresponde a la memoria de pre-evento de los instrumentos con que cuenta el edificio. Aun así, contando con los valores de la desviación estándar, puede señalarse que los resultados obtenidos son satisfactorios.

Tabla 6. Comparación de los amortiguamientos estimados con cada una de las técnicas utilizadas

Modo	FAD Señal Completa ξ	Propuesta			Paramétrico Modal	
		Señal Completa ξ	Señal por Ventanas		ξ_P	ξ_{DE}
			ξ_P	ξ_{DE}		
1	1.33	1.66	3.22	2.02	1.54	0.61
2		2.44	2.67	1.47	1.83	1.00
3		2.66	2.98	0.64	2.29	0.99
4		4.75	3.04	1.52	3.94	1.91

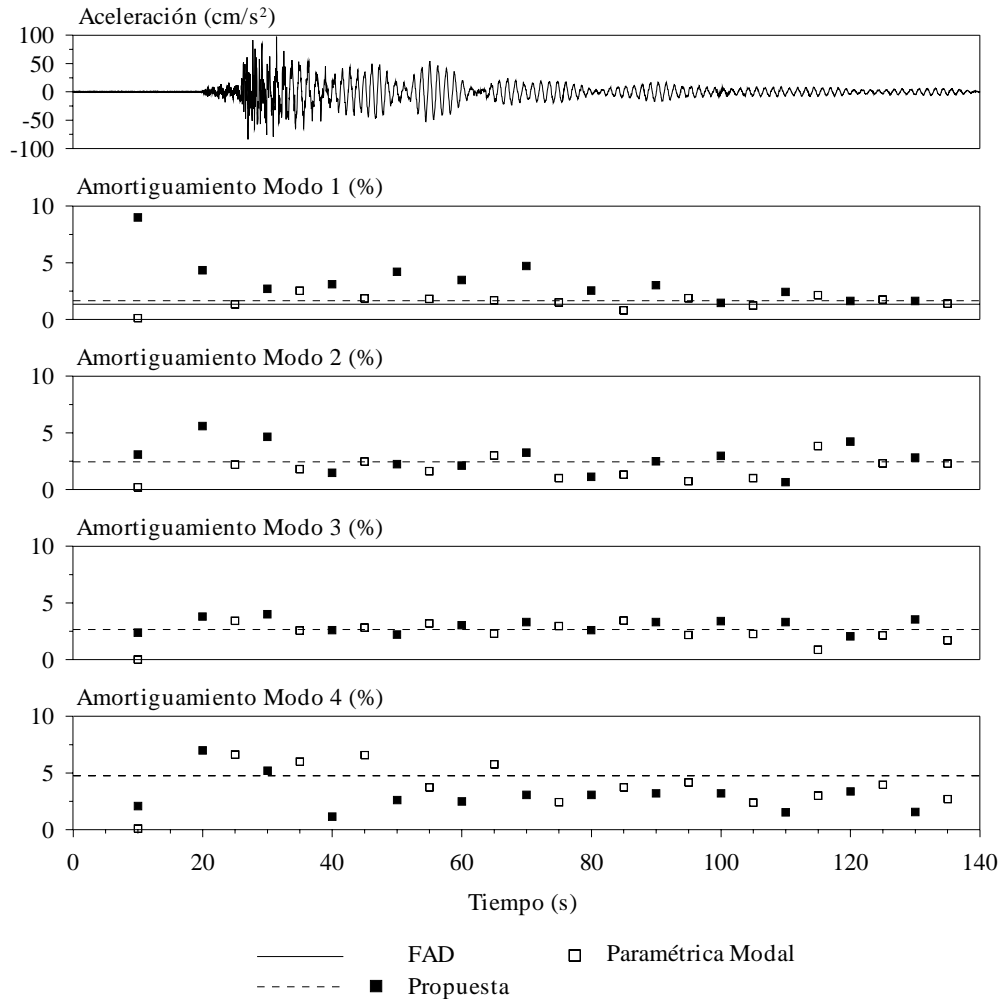


Figura 9. Comparación de los amortiguamientos estimados con cada una de las técnicas utilizadas

CONCLUSIONES

Se presenta un procedimiento que permite obtener apropiadamente los valores de amortiguamiento modal de un sistema partiendo del ajuste de la función de transferencia de uno de sus grados de libertad.

Los ejemplos teóricos enseñados resaltan el buen grado de estimación que puede obtenerse y destacan su superioridad frente al método aproximado del uso de la expresión del factor de amplificación dinámica, sobre el cual se encuentra que, en general, tiende a subestimar el valor del amortiguamiento. Con la ventaja adicional de que el procedimiento propuesto permite no solo determinar el amortiguamiento asociado al primer modo de vibrar sino también los respectivos a modos superiores.

La propuesta es también evaluada frente a los resultados de un análisis paramétrico modal por ventanas. Los resultados obtenidos indican que el método es también adecuado en análisis de este tipo, siempre que se tengan presente sus limitaciones por tratarse de un procedimiento que involucra un análisis espectral previo. Debe anotarse que, frente a la técnica paramétrica modal utilizada, sobresale el hecho de que el procedimiento propuesto requiere de un tiempo de cálculo considerablemente menor.

Es justo indicar que el método propuesto requiere tener un conocimiento previo de la estructura en estudio. Es preciso contar con la información necesaria para poder estimar adecuadamente los factores de participación de los modos a considerar, lo cual implica conocer la distribución de masas en cada uno de sus niveles o grados de libertad, así como las formas modales asociadas a cada una de las frecuencias que se incluyan, bien sea por medio de un modelo analítico o por métodos de no paramétricos fruto de la realización de pruebas dinámicas.

RECONOCIMIENTOS

Los autores desean hacer manifiesto su agradecimiento al Dr. David Murià Vila por sus valiosos comentarios durante el desarrollo de este trabajo, así como por su generosidad al haber facilitado el uso de los registros sísmicos y de vibración ambiental, al igual que los resultados obtenidos en el proyecto a su cargo sobre la instrumentación del edificio SIS, el cual es patrocinado por la Dirección General de Asuntos del Personal Académico y el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

REFERENCIAS

- Alcántara L, D Murià, D Almora, J M Velasco, M Torres, R Vázquez, E Vázquez, y M Macías (2002), “Sistema de monitoreo remoto en un edificio localizado en una ciudad expuesta a un peligro sísmico mayor”, *Octavas Jornadas Chilenas de Sismología e Ingeniería Antisísmica*, Valparaíso, Chile, 24 al 26 de abril.
- Bendat, J S y A G Piersol (1989), *Random data. Analysis and measurement procedure*, Wiley Interscience, New York.
- Correa, V M (2003), “Identificación de las propiedades dinámicas del edificio SIS por medio de un método paramétrico modal para los eventos SI-011 y SI-021”, *Trabajo de Investigación II*, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Ewins, D J (1986), *Modal testing: Theory and practice*, Research Studies Press Ltd., J. Wiley & Sons Inc.
- Ljung, L (1987), *System identification - Theory for the user*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Li Y y S T Mau (1990), “A computer program for multiple input - multiple output system identification using building seismic records”, *Research Report UHCEE 90-07*, Department of Civil and Environmental Engineering, University of Huston.
- Li Y y S T Mau (1991), “A case study MIMO system identification applied to building seismic records”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 20, pp. 1045-1064.
- Murià-Vila D, G Rodríguez, A Zapata y A M Toro (2001), “Seismic response of a twice-retrofitted building”, *ISET Journal of Earthquake Technology*, India, Vol. 38, No. 2-4, pp. 67-92.
- Murià-Vila D, R Taborda, M A Macías y J A Escobar (2002), “Instrumentación de un edificio alto en la ciudad de Acapulco”, *Octavas Jornadas Chilenas de Sismología e Ingeniería Antisísmica*, Valparaíso, Chile, abril 24 a 26.